Discrete Optimization
Instructor: Gabriel Nivasch

Exam

EPFL Lausanne
Spring 2012

Last name:

First name:

Exercise	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	XC1	XC2
Earned points													
Out of	9	9	10	9	9	10	11	11	8	7	7	8	8

Answer all questions.

No auxiliary materials are allowed of any kind.

Do not use pencil or red pen.

Exercise 1 (9 points)

Consider the following linear program, in which c is an unspecified constant:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & cx_1 + x_2 \\ \text{subject to:} & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 5 \end{array}$$

a) For which values of c is this program unbounded?
b) For which values of c is there a unique optimal solution?

Exercise 2 (9 points)

Write a linear program in x_1, x_2, x_3 for which the set of feasible solutions is the octahedron with vertices (±1, 0, 0), (0, ±1, 0), (0, 0, ±1) and for which the optimal solution is the edge joining vertices (1, 0, 0) and (0, 1, 0).

Exercise 3 (10 points)

Express the following two problems as linear programs (you do not need to solve the linear programs):

a) A hospital needs to have at least the following number of nurses on duty each day:

0:00 – 4:00	4:00 – 8:00	8:00 – 12:00	12:00 – 16:00	16:00 – 20:00	20:00 – 0:00
5 nurses	8 nurses	10 nurses	20 nurses	15 nurses	10 nurses

Each nurse reports daily at either 0:00, 4:00, 8:00, 12:00, 16:00, or 20:00 and works for 8 consecutive hours. The same schedule repeats day after day. We would like to find the schedule that minimizes the total number of nurses.

b) A paper mill produces paper rolls with a standard width of 3 meters. It receives the following order:

- 1700 rolls of width 131 cm;
- 2500 rolls of width 85 cm;
- 1400 rolls of width 80 cm;
- 3100 rolls of width 62 cm.

We would like to find the smallest number of 3m rolls that have to be cut to satisfy this order, and how to cut them.

Exercise 4 (9 points)

We would like to solve the following linear program with the simplex method:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimize} & x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\
\text{subject to:} & 2x_1 - x_3 = 7 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \geq 5 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

a) Express the linear program in equational form.

b) Which ***auxiliary linear program*** do we have to solve in order to find an initial feasible basis for our linear program?

Exercise 5 (9 points)

Consider the following simplex tableau:

$$
\begin{array}{rcrrrrrrr}
x_2 & = & 7 & + & 3x_1 & - & 5x_3 & - & 3x_4 \\
x_5 & = & & & 2x_1 & - & x_3 & + & 2x_4 \\
x_6 & = & & - & 2x_1 & + & 2x_3 & & \\
\hline
z & = & 10 & - & x_1 & + & x_3 & + & x_4
\end{array}
$$

a) What is the feasible solution corresponding to this tableau, and what is the corresponding value of the objective function?

b) What are the possible pivot steps from this tableau? Which of these pivot steps are degenerate?

c) Perform one of the pivot steps from part b) and write down the new tableau.

Exercise 6 (10 points)

We claimed in class that the problem of finding an optimal solution of a linear program is ***not harder*** than the problem of finding an arbitrary feasible solution. Meaning: If we were to have an oracle that, given an LP, returns a feasible solution, we could use this oracle to find optimal solutions to linear programs.
We gave in class ***two different arguments*** in support of this claim. What are they? (One argument gives 7 points.)

Exercise 7 (11 points)

a) Complete the following version of the Farkas lemma:

   For every mxn matrix A and every vector $\mathbf{b}$ in $\mathbf{R}^m$, ***either*** the system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has a nonnegative solution $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ***or*** …

b) Let $p_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $p_2 = (a_2, b_2, c_2)$, …, $p_5 = (a_5, b_5, c_5)$ be five points in $\mathbf{R}^3$, and let $q = (a, b, c)$ be another point in $\mathbf{R}^3$. Write a system of the form $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ that has a nonnegative solution if and only if q lies in the convex hull of p_1, …, p_5.

c) Use the Farkas lemma in part a) to prove that either q lies in the convex hull of p_1, …, p_5 or there exists a plane in $\mathbf{R}^3$ that separates q from p_1, …, p_5.

Exercise 8 (11 points)

We are given a bipartite graph with vertex sets V_1, V_2, $|V_1| = |V_2| = n$, and edge set $E \subseteq V_1 \times V_2$. Each edge $e \in E$ is assigned a nonnegative weight w_e. We are interested in finding a maximum-weight perfect matching. (Recall: A perfect matching is a set of n edges such that each vertex from V_1 and each vertex from V_2 is incident to exactly one edge.)

a) Express this problem as an integer program.

b) Appropriately relax the integer program in part a) into a linear program.

c) Prove that the linear program has an optimal solution that satisfies the original integer program.

Exercise 9 (8 points)

Recall that an *n-bit code with distance d* is a subset $C \subseteq \{0,1\}^n$ such that every two words in *C* differ in at least *d* bits. Suppose *d* = 2*r*+1 is an odd number. Prove that no *n*-bit code with distance *d* can have more than

$$\frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{r}}$$

words.

Exercise 10 (7 points)

Write the dual of the following linear program:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & -2x_1 + 3x_2 - 7x_4 \\
\text{subject to:} & x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\
& 3x_1 + 4x_4 \leq 7 \\
& 2x_2 - x_3 - x_4 \geq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_4 \leq 0
\end{array}
$$

Exercise 11 (7 points)

Consider the following system:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
2x & & & - & z & \leq & 9 \\
-x & + & 2y & - & z & \leq & 5 \\
x & - & 3y & & & \leq & -7 \\
x & - & 4y & & & \leq & -6 \\
 & & y & + & 3z & \leq & 0 \\
4x & + & y & + & 2z & \leq & -3
\end{array}
$$

Perform Fourier–Motzkin elimination on the variable z. Indicate how the equations in the new system can be obtained as linear combinations of the equations in the old system.

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Bachelor semester 4-DO

DISCRETE OPTIMIZATION EXAMEN

EXERCISE 1

Considérons le programme linéaire suivant, dans lequel c est une indéterminée.

$$\text{Maximiser } cx_1 + x_2$$
$$\text{sous contraintes}$$
$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1 + 3x_2 &\leq 0 \\ 4x_1 + x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

a)Pour quelle(s) valeurs de c ce programme n'est-il pas borné ?
b) Pour quelle(s) valeurs de c existe-t'il une unique solution optimale ?

EXERCISE 2

Ecrire un programme linéaire en x_1, x_2, x_3 pour lequel l'ensemble des solutions admissibles est l'octaèdre avec pour sommets $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$ et pour lequel la solution optimale est l'arête joignant les sommets $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, 0)$

EXERCISE 3

Exprimer les deux problèmes suivant comme programmes linéaires (on ne demande pas de résoudre ces programmes).
a) Un hôpital a le besoin minimal en infirmières suivant :

0 :00-4 :00	4 :00-8 :00	8 :00-12 :00	12 :00-16 :00	16 :00-20 :00	20 :00-0 :00
5 infirmières	8 infirmières	10 infirmières	20 infirmières	15 infirmières	10 infirmières

Chaque infirmère débute quotidiennement à 0 :00, 4 :00, 8 :00, 12 :00, 16 :00 ou 20 :00 et travaille 8heures consécutivement. Le même emploi du temps se répète jour après jour.
On veut trouver l'emploi du temps qui minimise le nombre total d'infirmières requises.
b)Une usine de papier produit des rouleaux de papiers standards de 3 mètres de long. Elle reçoit la commande suivante :

– 1700 rouleaux de longueur 131 cm.
– 2500 rouleaux de longueur 85 cm.
– 1400 rouleaux de longueur 80 cm.
– 3100 rouleaux de longueur 62 cm.

On voudrait connaitre le nombre minimal de rouleaux de 3m à utiliser pour satisfaire la commande, et comment les couper.

EXERCISE 4

On veut résoudre le programme linéaire suivant en utilisant la méthode du simplexe :

$$\text{Maximiser } x_1 - 3x_2 + 2x_3$$
$$\text{sous contraintes}$$
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a)Exprimer le programme linéaire sous forme équationnelle.
b)Quel programme linéaire auxiliaire doit-on résoudre pour trouver une base admissible initiale pour notre programme linéaire ?

EXERCISE 5

On considère le tableau du simplexe suivant :

$$\begin{aligned} x_2 &= 7 + 3x_1 - 5x_3 - 3x_4 \\ x_5 &= \quad +2x_1 - x_3 + 2x_4 \\ x_6 &= \quad -2x_1 + 2x_3 \\ \\ z &= 10 - x_1 + x_3 + x_4 \end{aligned}$$

a)Quelle est la solution admissible correspondant à ce tableau, et quelle est la valeur correspondante de la fonction objectif ?
b)Quelles sont les étapes du pivot possible à partir de ce tableau ? Parmi ces étapes, lesquelles sont dégénérées ?

c)Ecrire l'une des étapes du pivot (voir question b)) et écrire le nouveau tableau correspondant.

EXERCISE 6

On a affirmé en classe que le problème de trouver une solution optimale à un programme linéaire n'est pas plus difficile que le problème de trouver une solution admissible. Ce qui signifie que si on a un oracle qui, étant donné un programme linéaire, renvoie une solution admissible, on peut utiliser cet oracle pour trouver des solutions optimales.

On a donné deux arguments différents dans cette direction. Les rappeler (un argument donne 7 points).

EXERCISE 7

a)Compléter la version suivante du lemme de Farkas :

Pour toute matrice A de taille $m \times n$ et pour tout vecteur colonne $b \in \mathbb{R}^m$ alors ou bien le système $Ax = b$ a une solution positive $x \geq 0$ ou bien ...

b)Soit $p_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $p_2 = (a_2, b_2, c_2), ..., p_5 = (a_5, b_5, c_5)$ cinq points de $\mathbb{R}^3$. Soit q un autre point de $\mathbb{R}^3$. Ecrire un système de la forme $Ax = b$ qui a une solution positive si et seulement si q est dans l'enveloppe convexe de $p_1 ... p_5$.

c)Utiliser le lemme de Farkas (question a)) pour prouver que : soit q est dans l'enveloppe convexe de $p_1 ... p_5$, soit il existe un plan de $\mathbb{R}^3$ qui sépare q et $p_1 ... p_5$.

EXERCISE 8

On se donne un graphe bipartie avec un ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ avec $|V_1| = |V_2| = n$, et un ensemble d'arêtes $E \subset V_1 \times V_2$. Chaque arête $e \in E$ est affectée d'un poids positif w_e. On cherche à trouver un 'maximun-weight perfect matching' (on rappelle qu'un 'perfect matching' est un ensemble de n arêtes tel que tout sommet de V_1 et tout sommet de V_2 est incident à exactement une arête de cet ensemble).

a)Exprimer ce problème comme un programme entier.

b)Relaxer convenablement le problème de a partie a) de manière à obtenir un programme linéaire.

c) Prouver que le programme linéaire a une solution optimale qui satisfait le problème entier originel.

EXERCISE 9

On rappelle qu'un code à n-bits de distance d est un sous-ensemble $C \subset \{0,1\}^n$ tel que chaque couple de mots de C diffère d'au moins d bits. On suppose que $d = 2r + 1$ est impair.

Prouver qu'il n'existe pas de code à n-bits de distance d avec plus de

$$\frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{r}}$$

mots.

EXERCISE 10

Ecrire le programe dual du programme linéaire suivant

$$\text{Maximiser } -2x_1 + 3x_2 - 7x_4$$
$$\text{sous contraintes}$$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_4 &\leq 7 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ x_4 &\leq 0 \end{aligned}$$

EXERCISE 11

On considère le sytème suivant :

$$\begin{aligned} 2x \quad - z &\leq 9 \\ -x + 2y - z &\leq 5 \\ x - 3y \quad &\leq -7 \\ x - 4y \quad &\leq -6 \\ y + 3z &\leq 0 \\ 4x + y + 2z &\leq -3 \end{aligned}$$

Réaliser l'élimination de Fourier-Motzkin pour la variable z.Ecrivez les équations du nouveau système comme combinaisons linéaires de l'ancien système.