

## תרגילי קומבינטוריקה – עודכן: 26.5.2014

1. להלן זהות קומבינטורית, המתקיימת לכל  $n \geq 0$ :

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

- א. בדוק שהזהות אכן מתקיימת עבור  $n = 4$ .  
 ב. הוכח את הזהות באינדוקציה על  $n$ . רמזים:  
 • השתמש בזהות:  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$  עבור כל  $1 \leq k < n$ .  
 • הפרד את האיבר הראשון והאחרון של הסכום מהאיברים האמצעיים.  
 ג. תן הוכחה קומבינטורית של הזהות. כלומר, הראה ששני האגפים מהווים שתי דרכים שונות לספור את אותו הדבר.

2.

- א. מצא את המקדם של  $x^2y^5$  בביטוי:  $(x+y)^7$   
 ב. מצא את המקדם של  $x^3y^4$  בביטוי:  $(2x+3y+5)^{10}$

3. להלן זהות קומבינטורית:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

- א. בדוק שהזהות מתקיימת עבור  $n = 4$ .  
 ב. תן הוכחה קומבינטורית של הזהות.
4. כמה מילים באורך 9 ניתן לכתוב עם האותיות A, B, C, D, E כך ש-:  
 א. האות A תופיע בדיוק 3 פעמים?  
 ב. נשתמש בלא יותר משתי אותיות שונות?  
 ג. אף אות לא תופיע פעמיים רצוף? (למשל, CDDEABDCE אסור).  
 ד. המילה נקראת אותו הדבר גם מהסוף להתחלה? (כמו המילה CEDDADDEC)  
 ה. אף אות לא תופיע יותר מפעמיים במילה?  
**(כל סעיף הוא שאלה נפרדת.)**

5. יש  $n!$  דרכים לסדר את המספרים  $1, 2, \dots, n$ . מתוכן, כמה דרכים יש שבהם:

- א. 1 בא לפני 2? (כלומר, 35142 מותר, אבל 32415 אסור, למשל).  
 ב. 1 ו-2 מופיעים צמודים? (למשל, 35124 או 35214).  
 ג. 1 ו-2 לא מופיעים צמודים?  
**(כל סעיף הוא שאלה נפרדת.)**

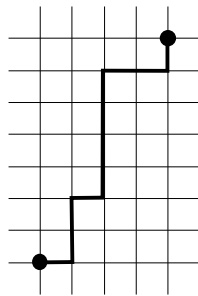
6. כמה מטריצות מסדר  $4 \times 5$  קיימות, שבהם כל תא מכיל את המספר 1, 2, או 3, ואין שתי שורות זהות במטריצה?

(למשל, המטריצה  $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  לא חוקית.)

7. נתון ש-  $|A| = n$ . הוכח כי מספר תתי הקבוצות של  $A$  בעלות מספר זוגי של איברים הוא  $2^{n-1}$  (כלומר, בדיוק חצי מסה"כ תתי הקבוצות).

(רמז: הגדר את  $X$  להיות קבוצת תתי הקבוצות של  $A$  בגודל זוגי, ואת  $Y$  להיות קבוצת תתי הקבוצות של  $A$  בגודל אי-זוגי. מצא פונקציה הפיכה מ- $X$  ל- $Y$ .)

8. חנית עושה שופינג בעיר מנהטן, אך עליה לחזור מיד לבית המלון שלה, שנמצא ברחוב 27 פינת שדרה 7. היא נמצאת כרגע ברחוב 20 פינת שדרה 3. כמה מסלולים מינימליים קיימים מהמיקום שלה ליעד שלה?



9. נתון ש-  $|A| = n$ . בכמה דרכים ניתן להגדיר שתי תתי-קבוצות  $X, Y \subseteq A$  כך ש-  $X \cup Y = A$ ?

10. בכמה דרכים ניתן לחלק 100 תפוזים (זהים) לחמישה ילדים (שונים), כך שכל ילד יקבל בין 10 ל-30 תפוזים?

11. מתוך  $26!$  התמורות של האותיות  $Z, \dots, A$ , כמה מהן לא מכילות אף אחת מהמילים: א. FLY, TOUR, SHAPE ב. ICE, CAR, RUN (שימו לב לאותיות C, R המשותפות) (כל סעיף הוא שאלה נפרדת.)

12. מתוך המספרים  $0, \dots, 9999$ , כמה מהם לא מתחלקים באף אחד מהמספרים הבאים: א. 5,6,7 ב. 10,12,15 (כל סעיף הוא שאלה נפרדת.)

13. 10 אנשים נכנסים למסעדה, וכל אחד מוסר לשומר את המטרייה שלו. כאשר הם יוצאים, השומר נותן מטרייה אחת לכל סועד, אבל אף סועד לא מקבל את המטרייה שלו בחזרה. כמה דרכים יש לשומר לבצע חלוקה כזאת? (תן ביטוי עם  $\Sigma$ .)

14. כמה מילים באורך  $n$  ניתן לכתוב עם האותיות  $\{a, b\}$  -ש-

א. לא מכילות "aa"?

ב. לא מכילות "ab"?

ג. לא מכילות "aaa"? (\*)

ד. לא מכילות "aba"? (\*) (הדרכה: הגדר  $y_n$  להיות מספר המילים באורך  $n$  שלא מכילות

"aba" ולא מתחילות ב-"ba".)

(כל סעיף הוא שאלה נפרדת.)

15. כמה מילים באורך  $n$  ניתן לכתוב עם האותיות  $\{a, b, c, d\}$  -ש-

א. לא מכילות אף אות פעמיים ברצף?

ב. לא מכילות "ab"? (הדרכה: הגדר  $y_n$  להיות מספר המילים באורך  $n$  שלא מכילות "ab"

ולא מתחילות ב-"b".)

ג. לא מכילות אף אות שלוש פעמים ברצף?

(כל סעיף הוא שאלה נפרדת.)

16. בכמה דרכים ניתן למלא לוח מלבני בגודל  $1 \times n$  עם חלקים מלבניים בגדלים

א.  $1 \times 1, 1 \times 2$ ?

ב.  $1 \times 1, 1 \times 2, 1 \times 3$ ? (\*)

ג.  $1 \times 2, 1 \times 5$ ? (\*)

(כל סעיף הוא שאלה נפרדת.)

17. בכמה דרכים ניתן למלא לוח מלבני בגודל  $2 \times n$  עם חלקים מלבניים בגדלים  $1 \times 1, 1 \times 2,$

$2 \times 2$ ? (מותר לטובב את החלקים.)

---

(\*) מצא רק נוסחת נסיגה עם תנאי התחלה.