פתרון נוסחאות נסיגה הומוגניות

גבריאל ניבש – 22.5.2014

דוגמה: סדרת פיבונצ'י

תנאי התחלה

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

נוסחת הנסיגה

דוגמה: סדרת פיבונצ'י

תנאי התחלה

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

נוסחת הנסיגה

הסדרה:

$$\begin{gathered} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_3 = 2 \\ F_4 = 3 \\ F_5 = 5 \\ F_6 = 8 \\ F_7 = 13 \\ F_8 = 21 \\ F_9 = 34 \\ \vdots \end{gathered}$$

דוגמה: סדרת פיבונצ'י

תנאי התחלה

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

נוסחת הנסיגה

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

הסדרה:

$$\begin{gathered} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_2 = 1 \\ F_3 = 2 \\ F_4 = 3 \\ F_5 = 5 \\ F_6 = 8 \\ F_7 = 13 \\ F_8 = 21 \\ F_9 = 34 \\ \vdots \end{gathered}$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

דוגמה: סדרת פיבונצ'י

תנאי התחלה

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

נוסחת הנסיגה

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

הסדרה:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_3 &= 2 \\ F_4 &= 3 \\ F_5 &= 5 \\ F_6 &= 8 \\ F_7 &= 13 \\ F_8 &= 21 \\ F_9 &= 34 \\ &\vdots \end{aligned}$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

שורשי הפולינום:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

דוגמה: סדרת פיבונצ'י

תנאי התחלה

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

נוסחת הנסיגה

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

הסדרה:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_3 = 2$$
$$F_4 = 3$$
$$F_5 = 5$$
$$F_6 = 8$$
$$F_7 = 13$$
$$F_8 = 21$$
$$F_9 = 34$$
$$\vdots$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

שורשי הפולינום:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

צורה כללית של הפתרון:

$$F_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

דוגמה: סדרת פיבונצ'י

תנאי התחלה
$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$
נוסחת הנסיגה
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

הסדרה:
$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_3 = 2$$
$$F_4 = 3$$
$$F_5 = 5$$
$$F_6 = 8$$
$$F_7 = 13$$
$$F_8 = 21$$
$$F_9 = 34$$
$$\vdots$$

מציאת הפולינום האופייני:
$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$
$$x^2 - x - 1 = 0$$

שורשי הפולינום:
$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

צורה כללית של הפתרון:
$$F_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

התאמה לתנאי התחלה:
$$\alpha + \beta = 0$$
$$\alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

דוגמה: סדרת פיבונצ'י

תנאי התחלה

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

נוסחת הנסיגה

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

הסדרה:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_3 = 2$$
$$F_4 = 3$$
$$F_5 = 5$$
$$F_6 = 8$$
$$F_7 = 13$$
$$F_8 = 21$$
$$F_9 = 34$$
$$\vdots$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

שורשי הפולינום:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

צורה כללית של הפתרון:

$$F_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

התאמה לתנאי התחלה:

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

דוגמה: סדרת פיבונצ'י

תנאי התחלה

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

נוסחת הנסיגה

הסדרה:

$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$
$$F_3 = 2$$
$$F_4 = 3$$
$$F_5 = 5$$
$$F_6 = 8$$
$$F_7 = 13$$
$$F_8 = 21$$
$$F_9 = 34$$
$$\vdots$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

שורשי הפולינום:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

צורה כללית של הפתרון:

$$F_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

התאמה לתנאי התחלה:

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

דוגמה: סדרת פיבונצ'י

תנאי התחלה

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

נוסחת הנסיגה

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

הסדרה:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_3 &= 2 \\ F_4 &= 3 \\ F_5 &= 5 \\ F_6 &= 8 \\ F_7 &= 13 \\ F_8 &= 21 \\ F_9 &= 34 \\ &\vdots \end{aligned}$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

שורשי הפולינום:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

צורה כללית של הפתרון:

$$F_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

התאמה לתנאי התחלה:

$$\alpha + \beta = 0$$

$$\alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$\boxed{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

זהו מספר שלם לכל n!

מציאת הפולינום האופייני:

$$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 5a_{n-3}$$

מציאת הפולינום האופייני:

$a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} - 5a_{n-3} = 0 \Leftarrow a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 5a_{n-3}$

מציאת הפולינום האופייני:

$$x^3 - 3x^2 + x - 5 = 0 \quad \Leftarrow \quad a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} - 5a_{n-3} = 0 \quad \Leftarrow \quad a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 5a_{n-3}$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 5a_{n-3}$$

$$a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} - 5a_{n-3} = 0$$

$$x^3 - 3x^2 + x - 5 = 0$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-5}$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$x^3 - 3x^2 + x - 5 = 0 \quad \Leftarrow \quad a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} - 5a_{n-3} = 0 \quad \Leftarrow \quad a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 5a_{n-3}$$

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-5} = 0 \quad \Leftarrow \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-5}$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$x^3 - 3x^2 + x - 5 = 0 \quad \Leftarrow \quad a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} - 5a_{n-3} = 0 \quad \Leftarrow \quad a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + 5a_{n-3}$$

$$x^5 - x^4 - 1 = 0 \quad \Leftarrow \quad a_n - a_{n-1} - a_{n-5} = 0 \quad \Leftarrow \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-5}$$

דוגמה:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} - \frac{10}{9}a_{n-2}$$

דוגמה:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} - \frac{10}{9}a_{n-2}$$

הסדרה:

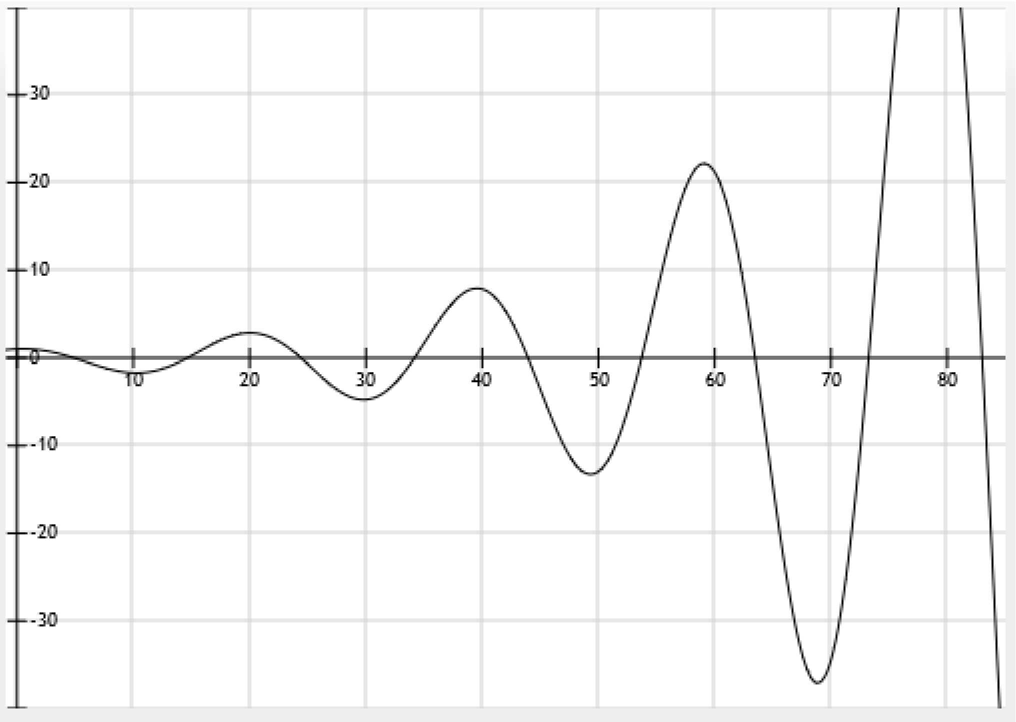
a0 = 1	**a20 = 2.83498**	**a40 = 7.84897**	a60 = 21.1849
a1 = 1	a21 = 2.69039	a41 = 7.02916	a61 = 17.7259
a2 = 0.888889	a22 = 2.23081	a42 = 5.33725	a62 = 11.913
a3 = 0.666667	a23 = 1.47229	a43 = 2.86432	a63 = 4.13063
a4 = 0.345679	a24 = 0.465906	a44 = -0.201632	a64 = -4.97545
a5 = -0.0493827	a25 = -0.704067	a45 = -3.58585	a65 = -14.5405
a6 = -0.482853	a26 = -1.92581	a46 = -6.94766	a66 = -23.5527
a7 = -0.910837	a27 = -3.06932	a47 = -9.91104	a67 = -30.9493
a8 = -1.28517	a28 = -3.99885	a48 = -12.1025	a68 = -35.7289
a9 = -1.5583	a29 = -4.58735	**a49 = -13.1927**	**a69 = -37.0697**
a10 = -1.68863	**a30 = -4.73153**	a50 = -12.9381	a70 = -34.4407
a11 = -1.64582	a31 = -4.366	a51 = -11.2178	a71 = -27.6928
a12 = -1.41538	a32 = -3.47475	a52 = -8.05982	a72 = -17.1181
a13 = -1.00208	a33 = -2.09839	a53 = -3.65545	a73 = -3.46647
a14 = -0.431504	a34 = -0.335945	a54 = 1.64444	a74 = 12.0872
a15 = 0.250408	a35 = 1.65966	a55 = 7.3505	a75 = 28.026
a16 = 0.980266	a36 = 3.69258	a56 = 12.8738	a76 = 42.6218
a17 = 1.6823	a37 = 5.5411	a57 = 17.5805	a77 = 54.1035
a18 = 2.27542	a38 = 6.97934	a58 = 20.8567	a78 = 60.8496
a19 = 2.68161	a39 = 7.80189	**a59 = 22.1795**	a79 = 61.5841

דוגמה:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} - \frac{10}{9}a_{n-2}$$

הסדרה:

a60 = 21.1849	**a40 = 7.84897**	**a20 = 2.83498**	a0 = 1
a61 = 17.7259	a41 = 7.02916	a21 = 2.69039	a1 = 1
a62 = 11.913	a42 = 5.33725	a22 = 2.23081	a2 = 0.888889
a63 = 4.13063	a43 = 2.86432	a23 = 1.47229	a3 = 0.666667
a64 = -4.97545	a44 = -0.201632	a24 = 0.465906	a4 = 0.345679
a65 = -14.5405	a45 = -3.58585	a25 = -0.704067	a5 = -0.0493827
a66 = -23.5527	a46 = -6.94766	a26 = -1.92581	a6 = -0.482853
a67 = -30.9493	a47 = -9.91104	a27 = -3.06932	a7 = -0.910837
a68 = -35.7289	a48 = -12.1025	a28 = -3.99885	a8 = -1.28517
a69 = -37.0697	**a49 = -13.1927**	a29 = -4.58735	a9 = -1.5583
a70 = -34.4407	a50 = -12.9381	**a30 = -4.73153**	**a10 = -1.68863**
a71 = -27.6928	a51 = -11.2178	a31 = -4.366	a11 = -1.64582
a72 = -17.1181	a52 = -8.05982	a32 = -3.47475	a12 = -1.41538
a73 = -3.46647	a53 = -3.65545	a33 = -2.09839	a13 = -1.00208
a74 = 12.0872	a54 = 1.64444	a34 = -0.335945	a14 = -0.431504
a75 = 28.026	a55 = 7.3505	a35 = 1.65966	a15 = 0.250408
a76 = 42.6218	a56 = 12.8738	a36 = 3.69258	a16 = 0.980266
a77 = 54.1035	a57 = 17.5805	a37 = 5.5411	a17 = 1.6823
a78 = 60.8496	a58 = 20.8567	a38 = 6.97934	a18 = 2.27542
a79 = 61.5841	**a59 = 22.1795**	a39 = 7.80189	a19 = 2.68161



fooplot.com

דוגמה:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} - \frac{10}{9}a_{n-2}$$

דוגמה:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} - \frac{10}{9}a_{n-2}$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$a_n - 2a_{n-1} + \frac{10}{9}a_{n-2} = 0$$

$$x^2 - 2x + \frac{10}{9} = 0$$

דוגמה:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} - \frac{10}{9}a_{n-2}$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$a_n - 2a_{n-1} + \frac{10}{9}a_{n-2} = 0$$

$$x^2 - 2x + \frac{10}{9} = 0$$

שורשי הפולינום:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{3}i, \qquad x_2 = 1 - \frac{1}{3}i$$

דוגמה:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} - \frac{10}{9}a_{n-2}$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$a_n - 2a_{n-1} + \frac{10}{9}a_{n-2} = 0$$

$$x^2 - 2x + \frac{10}{9} = 0$$

שורשי הפולינום:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{3}i, \qquad x_2 = 1 - \frac{1}{3}i$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}i\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}i\right)^n}$$

דוגמה:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} - \frac{10}{9}a_{n-2}$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$a_n - 2a_{n-1} + \frac{10}{9}a_{n-2} = 0$$

$$x^2 - 2x + \frac{10}{9} = 0$$

שורשי הפולינום:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{3}i, \qquad x_2 = 1 - \frac{1}{3}i$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}i\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}i\right)^n}$$

זה נותן מספר ממשי לכל *n*!

דוגמה:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \qquad a_n = 2a_{n-1} - \frac{10}{9}a_{n-2}$$

מציאת הפולינום האופייני:

$$a_n - 2a_{n-1} + \frac{10}{9}a_{n-2} = 0$$

$$x^2 - 2x + \frac{10}{9} = 0$$

שורשי הפולינום:

$$x_1 = 1 + \frac{1}{3}i, \qquad x_2 = 1 - \frac{1}{3}i$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3}i\right)^n + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}i\right)^n}$$

זה נותן מספר ממשי לכל n!

דרך אגב: נוסחה בלי מספרים מרוכבים:

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^n \cos\left(n \arctan\frac{1}{3}\right)$$

מה עושים כאשר שורש מופיע מספר פעמים?

מה עושים כאשר שורש מופיע מספר פעמים?

לדוגמה: **פולינום אופייני:** $(x-3)(x-4)^2(x-5)^3=0$

מה עושים כאשר שורש מופיע מספר פעמים?

לדוגמה: **פולינום אופייני:** $(x-3)(x-4)^2(x-5)^3=0$

צורה כללית של הפתרון: $a_n=\alpha_1 3^n+\alpha_2 4^n+\alpha_3 n4^n+\alpha_4 5^n+\alpha_5 n5^n+\alpha_6 n^2 5^n$

מה עושים כאשר שורש מופיע מספר פעמים?

לדוגמה: **פולינום אופייני:** $(x-3)(x-4)^2(x-5)^3=0$

צורה כללית של הפתרון: $a_n=\alpha_1 3^n+\alpha_2 4^n+\alpha_3 n 4^n+\alpha_4 5^n+\alpha_5 n 5^n+\alpha_6 n^2 5^n$

דוגמה: $b_n=4b_{n-1}-4b_{n-2}$ $\quad b_0=1, \quad b_1=1,$

הסדרה:

$$
\begin{gathered}
b_0=1 \\
b_1=1 \\
b_2=0 \\
b_3=-4 \\
b_4=-16 \\
b_5=-48 \\
b_6=-128 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

מה עושים כאשר שורש מופיע מספר פעמים?

לדוגמה: **פולינום אופייני:** $(x-3)(x-4)^2(x-5)^3=0$

צורה כללית של הפתרון: $a_n=\alpha_1 3^n+\alpha_2 4^n+\alpha_3 n4^n+\alpha_4 5^n+\alpha_5 n5^n+\alpha_6 n^2 5^n$

דוגמה: $b_n=4b_{n-1}-4b_{n-2}$ $\quad b_0=1,\quad b_1=1,$

הסדרה:

$$\begin{gathered} b_0=1\\ b_1=1\\ b_2=0\\ b_3=-4\\ b_4=-16\\ b_5=-48\\ b_6=-128\\ \vdots \end{gathered}$$

פולינום אופייני: $(x-2)^2=0$

מה עושים כאשר שורש מופיע מספר פעמים?

לדוגמה: **פולינום אופייני:** $(x-3)(x-4)^2(x-5)^3 = 0$

צורה כללית של הפתרון: $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 4^n + \alpha_3 n 4^n + \alpha_4 5^n + \alpha_5 n 5^n + \alpha_6 n^2 5^n$

דוגמה: $b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2}$ $\quad b_0 = 1, \quad b_1 = 1,$

הסדרה:

$$b_0 = 1$$
$$b_1 = 1$$
$$b_2 = 0$$
$$b_3 = -4$$
$$b_4 = -16$$
$$b_5 = -48$$
$$b_6 = -128$$
$$\vdots$$

פולינום אופייני: $(x-2)^2 = 0$

צורה כללית של הפתרון: $b_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n$

מה עושים כאשר שורש מופיע מספר פעמים?

לדוגמה: **פולינום אופייני:** $(x-3)(x-4)^2(x-5)^3 = 0$

צורה כללית של הפתרון: $a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 4^n + \alpha_3 n4^n + \alpha_4 5^n + \alpha_5 n5^n + \alpha_6 n^2 5^n$

דוגמה: $b_n = 4b_{n-1} - 4b_{n-2}$ $\quad b_0 = 1, \quad b_1 = 1,$

הסדרה:

$$b_0 = 1$$
$$b_1 = 1$$
$$b_2 = 0$$
$$b_3 = -4$$
$$b_4 = -16$$
$$b_5 = -48$$
$$b_6 = -128$$
$$\vdots$$

פולינום אופייני: $(x-2)^2 = 0$

צורה כללית של הפתרון: $b_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n$

הפתרון: $b_n = 2^n - n2^{n-1}$

דוגמה: אי-יציבות, רגישות לתנאי התחלה

$$a_n = -\frac{3}{2} a_{n-1} + a_{n-2}$$

$a_0 = 1$
$a_1 = 0.49$

$a_0 = 1$
$a_1 = 1/2$

דוגמה: אי-יציבות, רגישות לתנאי התחלה

$$a_n = -\frac{3}{2}a_{n-1} + a_{n-2}$$

$a_0 = 1$
$a_1 = 0.49$

$a_0 = 1$
$a_1 = 1/2$

$a_2 = 1/4$
$a_3 = 1/8$
$a_4 = 1/16$
$a_5 = 1/32$
$\vdots$

דוגמה: אי-יציבות, רגישות לתנאי התחלה

$$a_n = -\frac{3}{2}a_{n-1} + a_{n-2}$$

$a_0 = 1$
$a_1 = 0.49$

a2 = 0.265
a3 = 0.0925
a4 = 0.12625
a5 = -0.096875
a6 = 0.271563
a7 = -0.504219
a8 = 1.02789
a9 = -2.04605
a10 = 4.09697
a11 = -8.19151
a12 = 16.3842
a13 = -32.7679
a14 = 65.5361
a15 = -131.072
a16 = 262.144
a17 = -524.288
a18 = 1048.58
a19 = -2097.15

$a_0 = 1$
$a_1 = 1/2$

$a_2 = 1/4$
$a_3 = 1/8$
$a_4 = 1/16$
$a_5 = 1/32$
$\vdots$

דוגמה: אי-יציבות, רגישות לתנאי התחלה

$$a_n = -\frac{3}{2}a_{n-1} + a_{n-2}$$

$a_0 = 1$
$a_1 = 1/2$

$a_2 = 1/4$
$a_3 = 1/8$
$a_4 = 1/16$
$a_5 = 1/32$
$\vdots$

שואף לאפס בנחת

$a_0 = 1$
$a_1 = 0.49$

a2 = 0.265
a3 = 0.0925
a4 = 0.12625
a5 = -0.096875
a6 = 0.271563
a7 = -0.504219
a8 = 1.02789
a9 = -2.04605
a10 = 4.09697
a11 = -8.19151
a12 = 16.3842
a13 = -32.7679
a14 = 65.5361
a15 = -131.072
a16 = 262.144
a17 = -524.288
a18 = 1048.58
a19 = -2097.15

קופץ בצורה פראית

דוגמה: אי-יציבות, רגישות לתנאי התחלה

$$a_n = -\frac{3}{2}a_{n-1} + a_{n-2}$$

פולינום אופייני: $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)=0$

$a_0 = 1$
$a_1 = 1/2$

$a_2 = 1/4$
$a_3 = 1/8$
$a_4 = 1/16$
$a_5 = 1/32$
$\vdots$

שואף לאפס בנחת

$a_0 = 1$
$a_1 = 0.49$

a2 = 0.265
a3 = 0.0925
a4 = 0.12625
a5 = -0.096875
a6 = 0.271563
a7 = -0.504219
a8 = 1.02789
a9 = -2.04605
a10 = 4.09697
a11 = -8.19151
a12 = 16.3842
a13 = -32.7679
a14 = 65.5361
a15 = -131.072
a16 = 262.144
a17 = -524.288
a18 = 1048.58
a19 = -2097.15

קופץ בצורה פראית

דוגמה: אי-יציבות, רגישות לתנאי התחלה

פולינום אופייני: $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)=0$

$$a_n = -\frac{3}{2}a_{n-1} + a_{n-2}$$

$a_0 = 1$
$a_1 = 0.49$

a2 = 0.265
a3 = 0.0925
a4 = 0.12625
a5 = -0.096875
a6 = 0.271563
a7 = -0.504219
a8 = 1.02789
a9 = -2.04605
a10 = 4.09697
a11 = -8.19151
a12 = 16.3842
a13 = -32.7679
a14 = 65.5361
a15 = -131.072
a16 = 262.144
a17 = -524.288
a18 = 1048.58
a19 = -2097.15

קופץ בצורה פראית

$a_0 = 1$
$a_1 = 1/2$

$a_2 = 1/4$
$a_3 = 1/8$
$a_4 = 1/16$
$a_5 = 1/32$
$\vdots$

שואף לאפס בנחת

במקרה א': $a_n = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 0\cdot(-2)^n$

במקרה ב': $a_n = 0.996\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 0.004\cdot(-2)^n$

סדרות "קלועות":

$$a_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}, \qquad b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

תנאי התחלה $\longrightarrow$

$$\begin{array}{cc} [a_0 = 1] & [b_0 = 0] \\ a_1 = 3 & b_1 = 1 \\ a_2 = 8 & b_2 = 4 \\ a_3 = 20 & b_3 = 12 \\ a_4 = 48 & b_4 = 32 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

סדרות "קלועות":

לפעמים ניתן להפריד את הסדרות:

$$a_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}, \qquad b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

תנאי התחלה ⟶

$$\begin{array}{cc} [a_0 = 1] & [b_0 = 0] \\ a_1 = 3 & b_1 = 1 \\ a_2 = 8 & b_2 = 4 \\ a_3 = 20 & b_3 = 12 \\ a_4 = 48 & b_4 = 32 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

סדרות "קלועות":

לפעמים ניתן להפריד את הסדרות:

$$a_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}, \qquad b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$b_{n-1} = -a_n + 3a_{n-1}$$

תנאי התחלה

$$\begin{array}{cc} [a_0 = 1] & [b_0 = 0] \\ a_1 = 3 & b_1 = 1 \\ a_2 = 8 & b_2 = 4 \\ a_3 = 20 & b_3 = 12 \\ a_4 = 48 & b_4 = 32 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

סדרות "קלועות":

$$a_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}, \qquad b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

תנאי התחלה

$$\begin{array}{cc} [a_0 = 1] & [b_0 = 0] \\ a_1 = 3 & b_1 = 1 \\ a_2 = 8 & b_2 = 4 \\ a_3 = 20 & b_3 = 12 \\ a_4 = 48 & b_4 = 32 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

לפעמים ניתן להפריד את הסדרות:

$$b_{n-1} = -a_n + 3a_{n-1}$$

$n \leftarrow n + 1:$

$$b_n = -a_{n+1} + 3a_n$$

סדרות "קלועות":

$$a_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}, \qquad b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

לפעמים ניתן להפריד את הסדרות:

$$b_{n-1} = -a_n + 3a_{n-1}$$

$n \leftarrow n+1:$

$$b_n = -a_{n+1} + 3a_n$$

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

תנאי התחלה $\longrightarrow$

$[a_0 = 1]$	$[b_0 = 0]$
$a_1 = 3$	$b_1 = 1$
$a_2 = 8$	$b_2 = 4$
$a_3 = 20$	$b_3 = 12$
$a_4 = 48$	$b_4 = 32$
$\vdots$	$\vdots$

סדרות "קלועות":

$$a_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}, \qquad b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

תנאי התחלה

$[a_0 = 1]$	$[b_0 = 0]$
$a_1 = 3$	$b_1 = 1$
$a_2 = 8$	$b_2 = 4$
$a_3 = 20$	$b_3 = 12$
$a_4 = 48$	$b_4 = 32$
$\vdots$	$\vdots$

לפעמים ניתן להפריד את הסדרות:

$$b_{n-1} = -a_n + 3a_{n-1}$$

$n \leftarrow n+1$:

$$b_n = -a_{n+1} + 3a_n$$

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

סדרות "קלועות":

$$a_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}, \qquad b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

תנאי התחלה

$$[a_0 = 1] \quad [b_0 = 0]$$
$$a_1 = 3 \quad b_1 = 1$$
$$a_2 = 8 \quad b_2 = 4$$
$$a_3 = 20 \quad b_3 = 12$$
$$a_4 = 48 \quad b_4 = 32$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

לפעמים ניתן להפריד את הסדרות:

$$b_{n-1} = -a_n + 3a_{n-1}$$

$n \leftarrow n+1$:

$$b_n = -a_{n+1} + 3a_n$$

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$\boxed{a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}}$$

סדרות "קלועות":

$$a_n = 3a_{n-1} - b_{n-1}, \qquad b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

תנאי התחלה

$$\begin{array}{cc} [a_0 = 1] & [b_0 = 0] \\ a_1 = 3 & b_1 = 1 \\ a_2 = 8 & b_2 = 4 \\ a_3 = 20 & b_3 = 12 \\ a_4 = 48 & b_4 = 32 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

לפעמים ניתן להפריד את הסדרות:

$$b_{n-1} = -a_n + 3a_{n-1}$$

$n \leftarrow n + 1$:

$$b_n = -a_{n+1} + 3a_n$$

$$b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$\boxed{a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}}$$

באופן דומה:

$$\boxed{b_{n+1} = 4b_n - 4b_{n-1}}$$